

トーラスを切る ヴィラソーの円

ほりべかずのり
愛知県立春日井高等学校 堀部 和 経

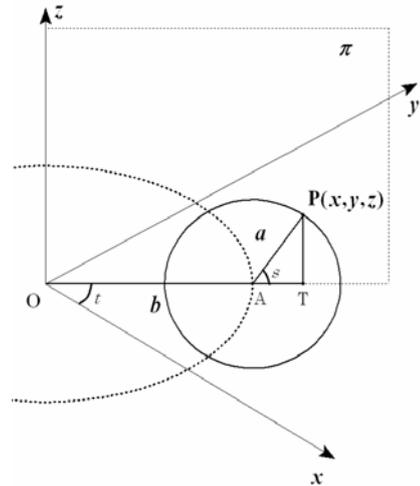
§ 1 トーラスTの表現

z軸を含む平面内にある半径 a の円の中心が z軸から b だけ離れて、z軸を1周してできるトーラスTを考える。但し、 $0 < a < b$ とする。

すると、トーラスTのパラメーター表示は、

$$\begin{cases} x = (a \cos s + b) \cos t \\ y = (a \cos s + b) \sin t \\ z = a \sin s \end{cases} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる。



§ 2 交わる2円になる証明

トーラスTの方程式は、パラメーター表示①から、 s, t を消去すると次のようになる。

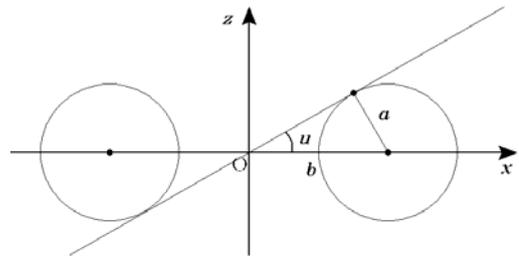
$$T : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - b \right)^2 + z^2 = a^2 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

(注) 直接、直角三角形APTにおいて、ピタゴラスの定理を用いてもよい。

さて、図のように y 軸を含み x 軸と角 u で交わる平面とトーラスの断面を考えるために、y 軸を回転軸とする角度 $(-u)$ の回転を考える。

回転後の座標を、 (X, Y, Z) とすると、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-u) & 0 & -\sin(-u) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-u) & 0 & \cos(-u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



である。

ところで、 $\cos u = \frac{c}{b}, \sin u = \frac{a}{b}$ 但し、 $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ であるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{b} & 0 & -\frac{a}{b} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & \frac{c}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

となる。

さて、回転後の平面 $Z = 0$ 上の曲線を調べてみよう。

方程式②に、 $Z = 0$ とおいた③を代入すると、

$$\left\{ \sqrt{\left(\frac{c}{b}X\right)^2 + Y^2 - b} \right\}^2 + \left(\frac{a}{b}X\right)^2 = a^2$$

となる。分母を払い、 c を消去すると、

$$\left\{ \sqrt{\left(\sqrt{b^2 - a^2}X\right)^2 + (bX)^2 - b^2} \right\}^2 + (aX)^2 = a^2b^2$$

であるから、展開し整理する。

$$X^2 + Y^2 + b^2 - a^2 = 2\sqrt{(b^2 - a^2)X^2 + b^2Y^2}$$

を得るので、両辺を2乗すると、

$$(X^2 + Y^2 + b^2 - a^2)^2 = 4(b^2 - a^2)X^2 + 4b^2Y^2$$

となる。以下、この式を整理する。

$$X^4 + Y^4 + 2X^2Y^2 - 2(b^2 - a^2)X^2 - 2(b^2 + a^2)Y^2 + (b^2 - a^2)^2 = 0$$

$$(X^2 - b^2)^2 + 2(Y^2 + a^2)(X^2 - b^2) + (Y^2 - a^2)^2 = 0$$

左辺を、 $(X^2 - b^2)$ の2次式と見ると、上手く因数分解できるのがわかる。

$$\{(X^2 - b^2) + (Y + a)^2\} \{(X^2 - b^2) + (Y - a)^2\} = 0$$

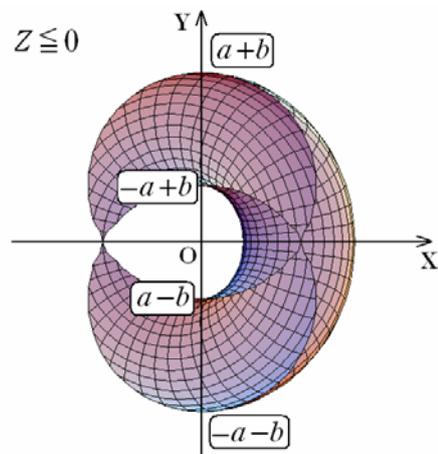
したがって、次の2円を得る。

$$X^2 + (Y + a)^2 = b^2$$

$$X^2 + (Y - a)^2 = b^2$$

中心が $(0, \pm a)$ で、半径が b の円である。

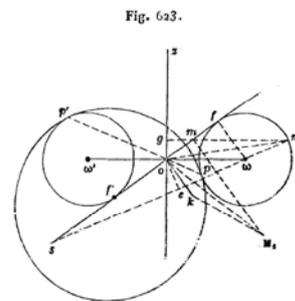
これって、とっても綺麗な結果と思いませんか？



§ 3 原典 (元ネタ)

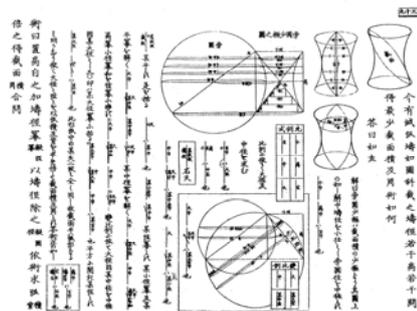
直井功先生 (岐阜県) に教えて頂きました。先生は、幾何学大事典の編集にも参加されておりました。

小倉金之助によって日本語訳 (大正4年=1915年) された、るーしえ、こんぶるーす共著「初等幾何学」(1900年) の1244番に、YVON VILLARCEAU (1848年) の結果として載っています。図は、その本 (原本) の (中) 表紙と証明用の図623です。



ところが、同様の結果が、長谷川弘、内田久命の「算法求積通考」(天保15年=弘化元年=1844年) の39番の問題に記載があります。

右の図は、その表紙と問題39ならびに解答です。但し、複数ページにまたがる解答をレイアウトし直してあります。



少し時間の前後はありますが、ほとんど同じ時期に、同じようなことを考えているなんて、面白いですね。このようなことは、いろいろな分野で確認できます。

うーん、不思議なことなのか、当然と考えるべきなのか、…!?

ヴィラソー (天文学者) について

Antoine Joseph Francois Yvon Villarceau です。

生没年は、1813/1/15~1883/12/23

§ 4 GRAPES を使って作業しました。

立体図形でも、等高線なら GRAPES はすぐに描いてくれますね。(^_^)v

GRAPES のファイル、《torus_cut.gps》で、等高線を描き、重ね合わせて模型を作りました。用紙代のみで作成可能です。

URL <http://horibe.jp> E-mail kazunori@horibe.jp

GRAPES で描いた、トーラスの等高線。実際に作る時は、直接 GRAPES で数本ずつ等高線を描いて、3 mm厚のスチレンボードに糊付けし、カッターなどで輪郭を切り取り、位置を間違えないで貼り合わせる。

