トーラスを切る　ヴィラソーの円

愛知県立春日井高等学校　堀部和経（ほりべ かずのり）

トーラスの２重接触平面による断面は、ヴイラソーの円と呼ばれる２円である。

トーラスＴを２重接触平面（図２を参照）で切断すると、切断面は２つの交わる同半径の円となる。この円のことをヴィラソーの円という。以下、まずその証明をする。

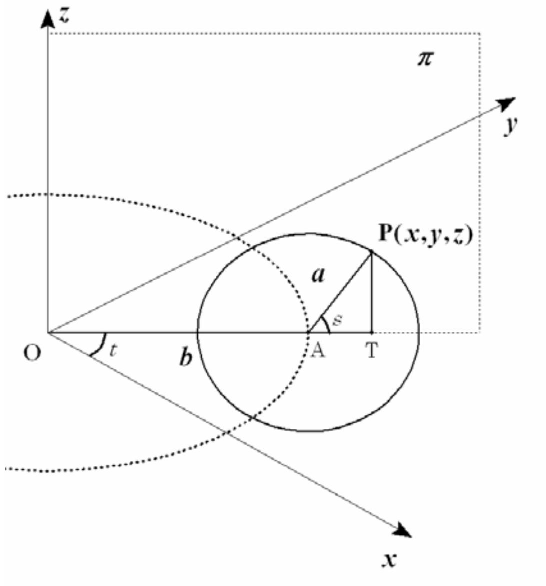

図１　トーラスＴのパラメータ表示

§１　トーラスＴのパラメータ表示①

Z 軸を含む平面 π に含まれる半径 a の円の中心が Z 軸から b だけ離れている。この円を Z 軸の周りに１周してできるトーラスＴを考える。但し、$0<a<b$ とする。

すると、トーラスＴのパラメータ表示は、

$$\begin{cases} x=(a\cos s+b)\cos t \\ y=(a\cos s+b)\sin t \\ z=a\sin s \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

となる。

§２　交わる２円になる証明

トーラスＴの方程式は、パラメータ表示①から、s,t を消去すると次のようになる。

（注）直角三角形ＡＰＴにおいて、ピタゴラスの定理を用いてもよい。

$$\text{T}:\left(\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+z^2=a^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

さて、図のように y 軸を含み x 軸と角 u で交わる平面とトーラスの断面を考えるために、y 軸を回転軸とする角度（$-u$）の回転を考える。

回転後の座標を、(X,Y,Z) とすると、

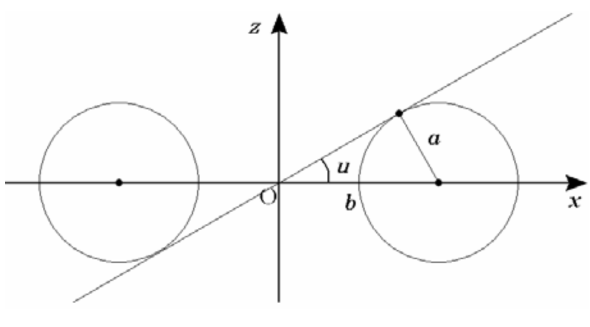

図２　トーラスＴの $x-z$ 平面による断面図

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(-u) & 0 & -\sin(-u) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-u) & 0 & \cos(-u) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

である。ここで、$\cos u=\dfrac{c}{b},\sin u=\dfrac{a}{b}$　但し、$c=\sqrt{b^2-a^2}$ を用いると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{b} & 0 & -\frac{a}{b} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{b} & 0 & \frac{c}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

となる。

さて、回転後の平面$Z=0$上の曲線を調べるために、方程式②に③を代入し$Z=0$とすると、

$$\left\{ \sqrt{\left(\frac{c}{b} X \right)^2 + Y^2} - b \right\}^2 + \left(\frac{a}{b} X \right)^2 = a^2$$

となる。分母を払い、cを消去すると、

$$\left\{ \sqrt{\left(\sqrt{b^2-a^2} X \right)^2 + (bX)^2} - b^2 \right\}^2 + (aX)^2 = a^2 b^2$$

であるから、展開し整理する。すると、

$$X^2 + Y^2 + b^2 - a^2 = 2\sqrt{(b^2-a^2)X^2 + b^2 Y^2}$$

を得るので、両辺を２乗する。

$$\left(X^2 + Y^2 + b^2 - a^2 \right)^2 = 4(b^2-a^2)X^2 + 4b^2 Y^2$$

以下、この式を整理する。

$$X^4 + Y^4 + 2X^2Y^2 - 2(b^2-a^2)X^2 - 2(b^2+a^2)Y^2 + (b^2-a^2)^2 = 0$$

ここで、(X^2-b^2)に着目して、

$$(X^2-b^2)^2 + 2(Y^2+a^2)(X^2-b^2) + (Y^2-a^2)^2 = 0$$

と変形し、左辺を(X^2-b^2)の２次式と見ると、次のように因数分解できるのがわかる。

$$\{(X^2-b^2)+(Y+a)^2\}\{(X^2-b^2)+(Y-a)^2\} = 0$$

したがって、次の２円を得る。

$$X^2 + (Y+a)^2 = b^2$$
$$X^2 + (Y-a)^2 = b^2$$

中心が$(0,\pm a)$で、半径がbの円である。

以上で、切断面は２つの交わる同半径の円となることが示された。

図３は、トーラスＴを２重接触平面で切断した半分の図である。はっきりと半径bの円が確認できる。４次式が２次式２つへ因数分解できることが、２次曲線が２つあるということの説明がはっきりする例である。

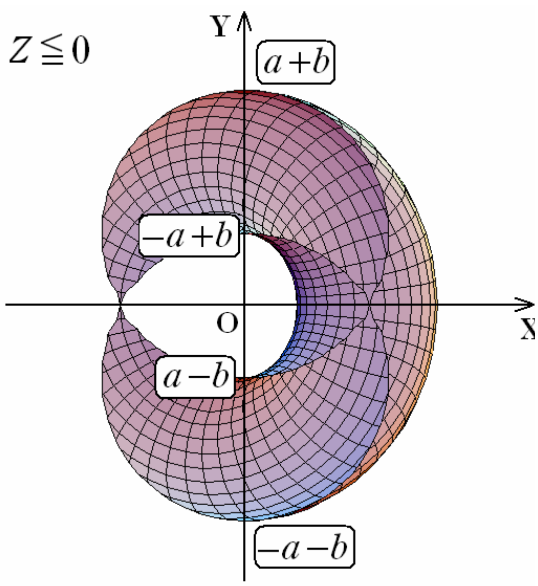

図３　トーラスＴの$Z \leq 0$部分

§３　２つの参考文献について

§２で証明したことは、小倉金之助によって、フランス語から日本語に訳された、るーしぇ，こんぶるーす共著「初等幾何学」（１９００年、日本語版は大正４年＝１９１５年）の１２４４番にＹＶＯＮ　ＶＩＬＬＡＲＣＥＡＵの結果（１８４８年）として掲載されている。図５は、その本（原本）の（中）表紙と証明用の図６２３。その証明は立体幾何で直接証明されている。

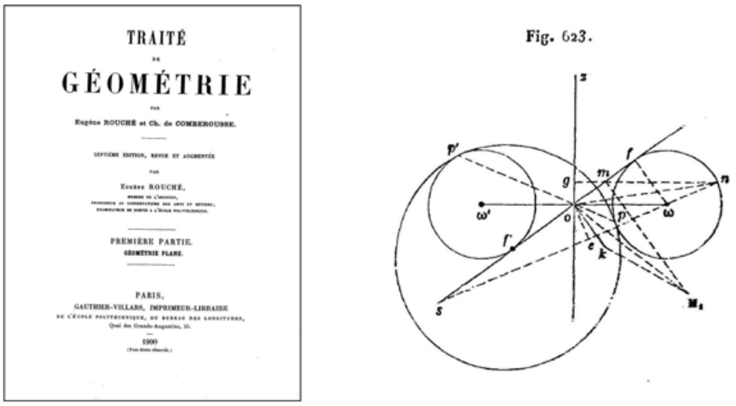

図５　「初等幾何学」（１９００年）

このことと同様の結果が、長谷川弘，内田久命の「算法求積通考」（天保１５年＝弘化元年＝１８４４年）の３９番の問題に記載されている。図６は、その表紙と問題３９ならびに解答である。ただし、トーラスの概念は当時の日本になく、つづみ形の断面として考察している。

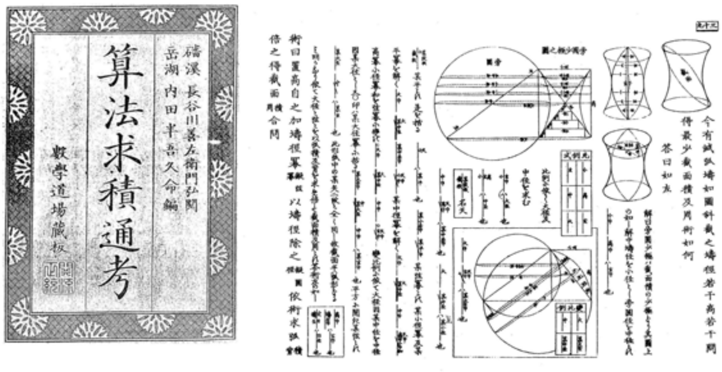

図６「算法求積通考」（１８４４年）

まったく別の文化の中で、ほとんど同じ時期に、同じ様なことを考えてられている。この事はとても興味深いことである。

§４　GRAPES を利用して模型を作る

トーラスＴの等高線を GRAPES で描き、断面のヴィラソーの円をはっきり見せることのできる模型を作った。

方程式②に③を代入しＺの値を少しずつ変化させて作った等高線状の断面図を GRAPES で描いた。その等高線を重ね合わせて模型を作った。図７は GRAPES で描いた、トーラスの等高線である。実際に作るときは、直接 GRAPES で数本ずつ等高線を描いて、３ｍｍ厚のスチレンボードに糊付けし、カッターなどで輪郭を切り取り、位置を間違えないで貼り合わせる。

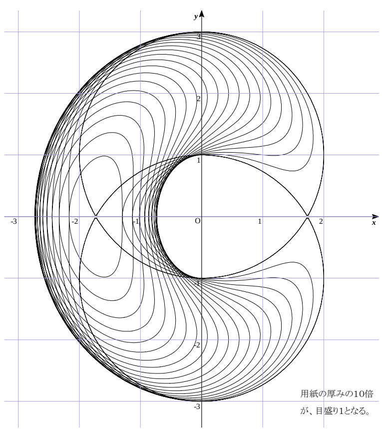

図７　等高線図


写真１　模型１

§５　ヴィラソーの円を回転し、トーラスＴを作る

ヴイラソーの円（の一方）を、トーラスＴの軸（z 軸）に沿って回転したものは、当然であるが元のトーラスＴとなる。この考え方で§１とは異なるパラメータ表示②を次のように得る。

$$x = AO\cos t + HA\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= (a+b\cos s)\cos t + b\sin s\cos u\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= (a+b\cos s)\cos t - c\sin s\sin t$$
$$y = AO\sin t + HA\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= (a+b\cos s)\sin t + b\sin s\cos u\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= (a+b\cos s)\sin t + c\sin s\cos t$$
$$z = PA\sin u = b\sin s\sin u = a\sin s$$

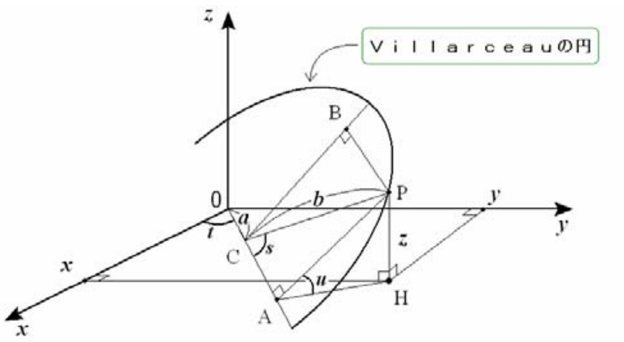

図７　パラメータ表示②

但し、$\sin u = \dfrac{a}{b}, \cos u = \dfrac{c}{b}, c = \sqrt{b^2 - a^2}$ である

このアイデアを生かして、作った模型を２つ紹介する。

写真２は、１０本のリングが互いに絡みあい、全体としてトーラスを形作っている。リングが３本のものは、指輪やペンダントヘッドとして市販されている。また、写真３では、１本のステンレスが少しずつズレながらヴィラソーの円を近似するような状態でらせん状に絡んで、これも全体としてトーラスを形作っている。また、写真２の模型はバネのように高さが変化するものである。

写真２　リング１０本

写真３　らせん状

ここに載せた図、写真、ファイルおよびデータの詳細は、URL　http://horibe.jp からリンクをたどれば、簡単に手に入るようにしてある。

[謝辞]　この文を書くに当たって直井功先生（岐阜県関市）から「算法求積通考」について教えて頂きました。ここに感謝の気持ちを記しておきたいと思います。