トーラス と カッシーニの卵形

ほり べ かず のり
愛知県立春日井高等学校 堀 部 和 経

§１ トーラスＴの断面の方程式

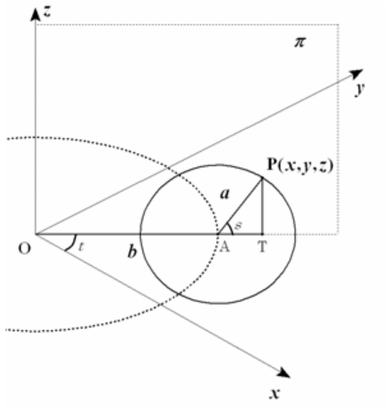


図１ トーラスＴのパラメータ表示

Z 軸を含む平面 π に含まれる半径 a の円の中心が Z 軸から b だけ離れている。この円を Z 軸の周りに１周してできるトーラスＴを考える。但し、$0 < a < b$ とする。

すると、トーラスＴのパラメータ表示は、

$$\begin{cases} x = (a\cos s + b)\cos t \\ y = (a\cos s + b)\sin t \quad \cdots\cdots\cdots \text{①} \\ z = a\sin s \end{cases}$$

となる。トーラスＴの方程式は、パラメータ表示①から、s,t を消去すると次のようになる。

$$\text{T}:\left(\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+z^2=a^2 \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

トーラスＴの

平面 π ： $y = t$ ………③

による断面の曲線 ω を考える。すると ω は、

$$\left(\sqrt{x^2+t^2}-b\right)^2+z^2=a^2$$

を展開し整理すると、

$$x^2+z^2+t^2-a^2+b^2=2b\sqrt{x^2+t^2}$$

を得るので、両辺を２乗し整理する。

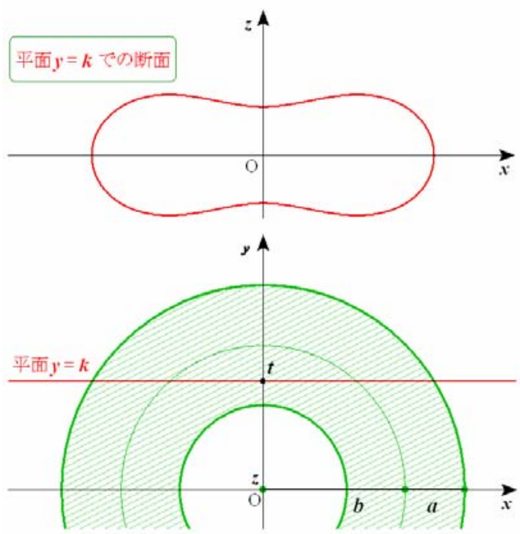


図２ トーラスＴの断面の説明

$$\left(x^2+z^2\right)^2+2(t^2-a^2-b^2)x^2+2(t^2-a^2+b^2)z^2$$
$$+(t^4-2a^2t^2-2b^2t^2+a^4+b^4-2a^2b^2)=0 \cdots\cdots\cdots \text{④}$$

§２ カッシーニの卵形の方程式

２点 $C(c,0)$，$D(-c,0)$ からの距離の積が d^2 となる曲線をカッシーニの卵形（※）という。

※（ Cassinian oval ）

$$PC \cdot PD = d^2$$
$$\left\{(x-c)^2+z^2\right\}\left\{(x+c)^2+z^2\right\}=d^4$$
$$(x^2+z^2+c^2)^2-4c^2x^2=d^4$$
$$(x^2+z^2)^2-2c^2(x^2-z^2)+c^4-d^4=0 \cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$

§３　トーラスＴの断面ωとカッシーニの卵形の一致条件

断面の曲線ωが、カッシーニの卵形と一致する条件を考える。具体的に④と⑤を比較して、

$$\begin{cases} c^2 = -t^2 + a^2 + b^2 \\ c^2 = t^2 - a^2 + b^2 \\ c^4 - d^4 = t^4 - 2a^2t^2 - 2b^2t^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \end{cases}$$

となる。第１式と第２式より、$t = a$ を得る。

従って、$c = b$ となる。第３式より、

$$b^4 - d^4 = a^4 - 2a^4 - 2a^2b^2 + a^4 + b^4 - 2a^2b^2$$

$$d^4 = 4a^2b^2$$

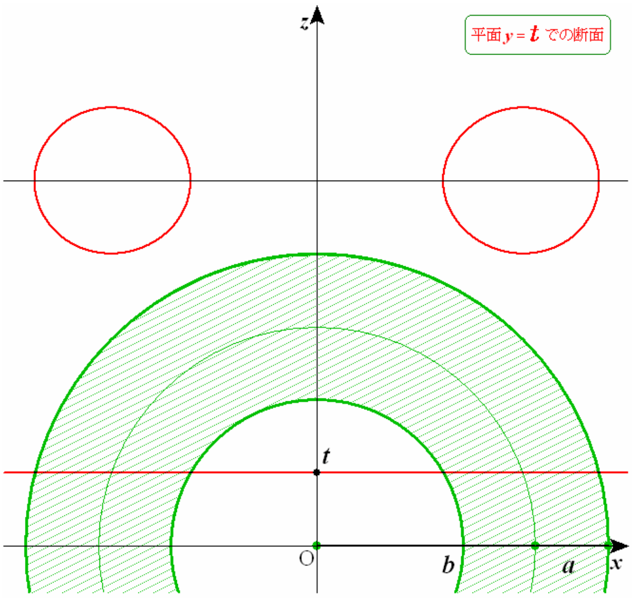
$$d = \sqrt{2ab}$$

§４　断面ωとカッシーニの卵形の一致する例

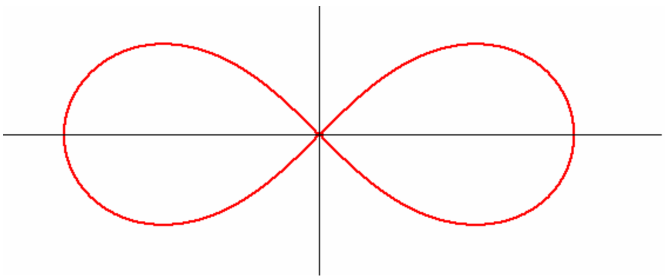
（例１） $b = 3a$， $t = a$

（例２） $b = 2a$， $t = a$ （レムニスケート）

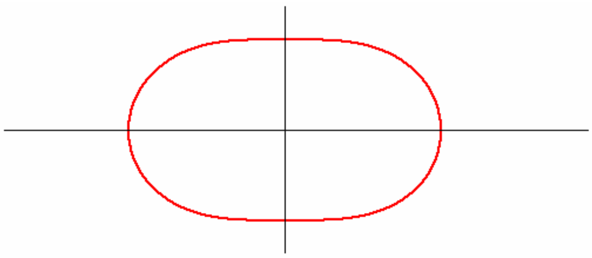
（例３） $t = a = b$



例１



例２



例３

§５　まとめ

トーラスＴの切断面の曲線がカッシーニの卵形となるための切断平面πは、

π ： $y = a$

である。したがって、切断面πによる断面の曲線（カッシーニの卵形） ωは、

ω ： $(x^2 + z^2)^2 - 2b^2(x^2 - z^2) + b^2(b^2 - 4a^2) = 0$

となる。