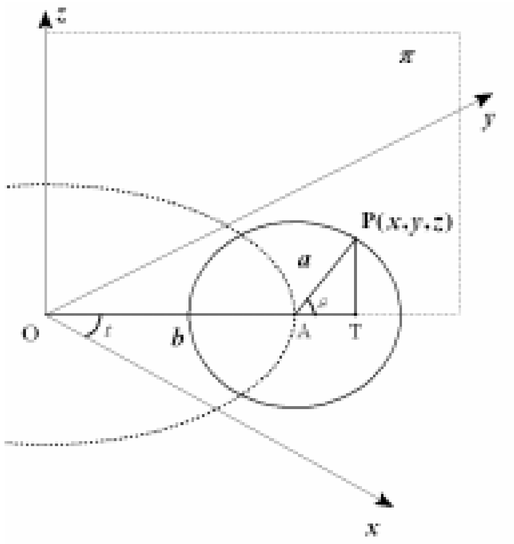
トーラスとある平面との交線

§１　MATHEMATICA-Animation

トーラスＴのパラメーター表示は、

$$x = (a\cos s + b)\cos t$$
$$y = (a\cos s + b)\sin t \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$
$$z = a\sin s$$

である。



MATHEMATICA を用いて、
作ったアニメ作成用の
CODE を記す。

```
a = 3;
b = 6;
c = Sqrt[b^2 - a^2];

fx[s_, t_] := (a*Cos[s] + b)Cos[t];
fy[s_, t_] := (a*Cos[s] + b)Sin[t];
fz[s_, t_] := a Sin[s];

fxx[s_, t_] := (c*fx[s, t] + a*fz[s, t])/b;
fyy[s_, t_] := fy[s, t];
fzz[s_, t_] := (-a*fx[s, t] + c*fz[s, t])/b;

Do[
ParametricPlot3D[{fxx[s, t], fyy[s, t], fzz[s, t]},
{t, -Pi, Pi},{s, -Pi, Pi },
PlotRange -> {{-(a + b + 1), a + b + 1}, {-(a + b + 1), a + b + 1}, {-(a + b + 1) + i, i}},
Axes -> False, PlotPoints -> {51, 71},
ViewPoint -> {0.934, -1.725, 2.757},
DisplayFunction -> $DisplayFunction],
{i, b, -b, -1}]
```

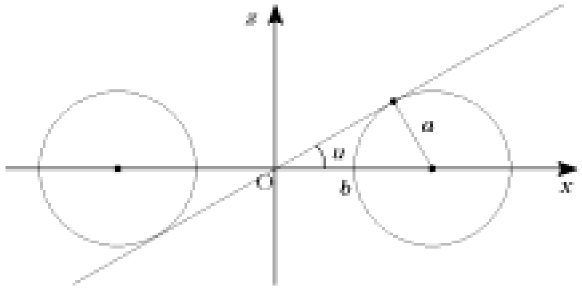
§２　交線が交わる２円になる証明

トーラスＴの方程式は、パラメーター表示①から、s,t を消去すると次のようになる。

$$\mathrm{T}：\left(\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+z^2=a^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

これは、直接、直角三角形ＡＰＴにおいて、ピタゴラスの定理を用いてもよい。

さて、図のように y 軸を含み x 軸と角 u で交わる平面とトーラスの断面を考えるために、y 軸を回転軸とする角度（$-u$）の回転を考える。



回転後の座標を、(X,Y,Z) とすると、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(-u) & 0 & -\sin(-u) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-u) & 0 & \cos(-u) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

である。

ところで、$\cos u=\dfrac{c}{b},\sin u=\dfrac{a}{b}$ 但し、$c=\sqrt{b^2-a^2}$ であるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{c}{b} & 0 & -\dfrac{a}{b} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{a}{b} & 0 & \dfrac{c}{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

となる。

さて、回転後の平面 $Z=0$ 上の曲線を調べてみよう。

方程式②に、$Z=0$ とおいた③を代入すると、

$$\left\{\sqrt{\left(\frac{c}{b}X\right)^2+Y^2}-b\right\}^2+\left(\frac{a}{b}X\right)^2=a^2$$

となる。分母を払い、c を消去すると、

$$\left\{\sqrt{\left(\sqrt{b^2-a^2}X\right)^2+(bX)^2}-b^2\right\}^2+(aX)^2=a^2b^2$$

であるから、展開し整理する。

$$X^2+Y^2+b^2-a^2=2\sqrt{\left(b^2-a^2\right)X^2+b^2Y^2}$$

を得るので、両辺を２乗すると、

$$\left(X^2+Y^2+b^2-a^2\right)^2=4\left(b^2-a^2\right)X^2+4b^2Y^2$$

となる。以下、この式を整理し、因数分解することが出来るので、順に書いていく。

$$X^4+Y^4+2X^2Y^2-2(b^2-a^2)X^2-2(b^2+a^2)Y^2+(b^2-a^2)^2=0$$

$$(X^2-b^2)^2+2(Y^2+a^2)(X^2-b^2)+(Y^2-a^2)^2=0$$

$$\left\{(X^2-b^2)+(Y+a)^2\right\}\left\{(X^2-b^2)+(Y-a)^2\right\}=0$$

したがって、

$$X^2+(Y+a)^2=b^2 \quad , \quad X^2+(Y-a)^2=b^2$$

を得る。つまり、ともに半径がb、中心が$(0,a)$と$(0,-a)$の２円となる。